Olimpiada Naţională de Matematică 2007

Etapa finală, Piteşti

13 aprilie 2007

Prima probă de selectie pentru OIM si OBM

Subiectul 1. Considerăm un punct P în interiorul unui poligon convex $A_1A_2\ldots A_{2n}$, $n\geq 2$, nesituat pe niciuna din diagonalele acestuia. Arătaţi că există o latură a poligonului care nu este intersectată de niciuna dintre dreptele $PA_1, PA_2, \ldots, PA_{2n}$.

Subiectul 2. Fie $\mathcal{C}(O_1)$ şi $\mathcal{C}(O_2)$ două cercuri exterioare. Punctele A, B, C aparţin cercului $\mathcal{C}(O_1)$ iar punctele D, E, F aparţin cercului $\mathcal{C}(O_2)$, astfel încât AD şi BE sunt tangente exterioare la cercuri, iar CF este o tangentă comună cu punctele C, F aflate în interiorul patrulaterului $ABED$. Dreptele CO_1 şi FO_2 intersectează dreptele AB, respectiv DE în M, respectiv N.

Arătaţi că dreapta MN trece prin mijlocul segmentului CF.

Subiectul 3. Fie $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $|f(x)-f(y)|\leq (x-y)^2$, pentru orice $x, y\in\mathbb{Q}$. Să se arate că f este constantă.

Subietcul 4. Determinaţi valoarea maximă a produsului $(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)$, $n\geq 2$, dacă $x_1\geq 0, x_2\geq 0, \ldots, x_n\geq 0$ şi $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$.

Timp de lucru 4 ore